Estudio de un tranque en bóveda de radio variable para el embalse de las lagunas de Mondaca

POR

LUIS EYQUEM

(Continuación)

Tranque considerado como muro

El peso propio del muro y el volumen de agua ACB que gravita sobre el tranque, transmiten en la base B cargas verticales; el arco está en un plano horizontal, luego la totalidad de estas cargas las recibe el muro. Solo se necesita determinar la distribución entre muro y arco del empuje del agua.

Sea *m* la fracción de empuje que recoje el muro; (*0* y *1*).

En este caso partiremos de la ecuación general,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M x}{E I}$$

$$M x = m \frac{(h-x)^2}{2} \frac{h-x}{3} = m \frac{(h-x)^3}{6} ; \quad I = \frac{b y^3}{12}$$

siendo b = unidad, $I = \frac{y^3}{12}$

Para expresar y en función de *x* hay que buscar una expresión aproximada de la curva del tranque, y que sea integrable. He adoptado la ec. $y = a (h-x)^n$

$$I = \frac{y^3}{12} = \frac{a^3}{12} (h-x)^{3n}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2 m (h-x)^3}{a^3 E (h-x)^{3n}} = \frac{2 m}{a^3 E} (h-x)^{3-3n}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,m}{a^3\,E}\int (h-x)^{3-3n}\,dx = -\frac{2\,m}{a^3\,E}\,\frac{(h-x)^{4-3n}}{4-3n} + C_1$$

cuando $x = 0$; $\frac{dy}{dx} = 0$; luego, $C_1 = \frac{2\,an\,h^{4-3n}}{a^3\,E\,(4-3n)}$

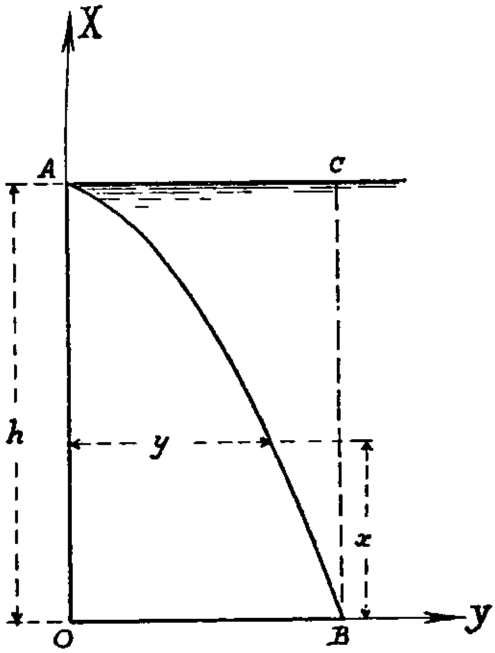

Fig. 4

$$y = d = -\frac{2\,m}{a^3\,E}\int \frac{\left[(h-x)^{4-3n} - h^{4-3n}\right]}{4-3n}\,dx = \frac{2\,m}{a^3\,E}\left[\frac{(h-x)^{5-3n}}{(4-3n)\,(5-3n)} + \frac{h^{4-3n}\,x}{4-3n}\right] + C_2$$

cuando $x = 0$; $y = 0$; luego $C_2 = \frac{-2\,m\,h^{5-3n}}{(a^3\,E\,(4-3n)\,(5-3n)}$

$$(1) \quad d = \frac{2\,m}{a^3\,E}\left[\frac{(h-x)^{5-3n} - h^{5-3n}}{(4-3n)(5-3n)} + \frac{h^{4-3n}\,x}{4-3n}\right]$$

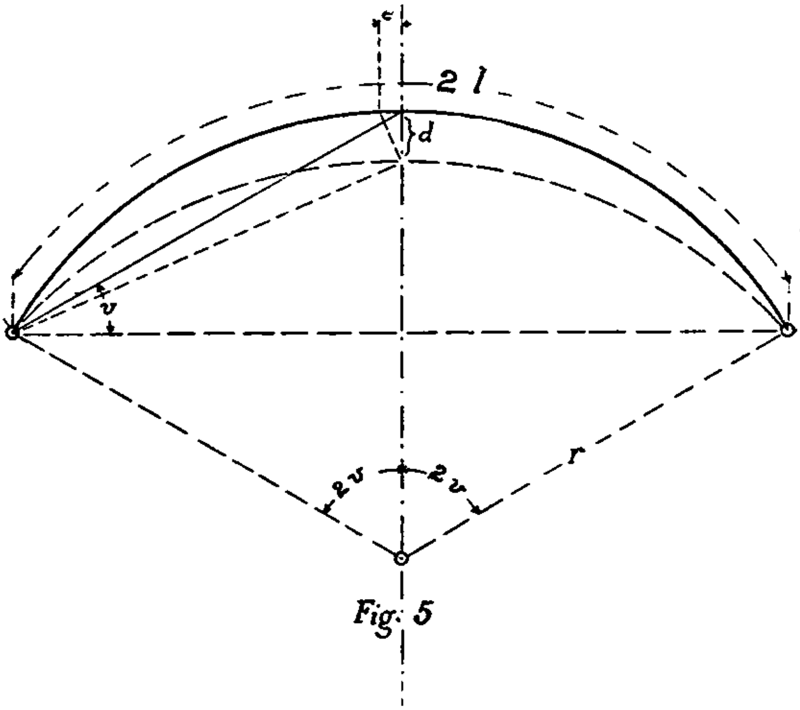

Fig. 5

Tranque considerado como arco

Sea:

r = radio del anillo considerado;
$2\,l$ = desarrollo del anillo considerado;
$4\,v$ = ángulo al centro a la altura x;
E = módulo de elastidad;
$(1 \quad m)$ = fracción de carga recojida por el arco;
$2\,e$ = acortamiento total del arco debido al empuje:
y = espesor del arco a la altura x;
T = empuje del arco;
d = deformación del centro del arco debido al empuje.

$$d = e \cot v$$

$$e = \frac{T\ l}{E\ y}\ ;\ T = (1 - m)\ (h - x)\ r$$

$$y = a\ (h - x)^n$$

$$(2) \qquad d = \frac{(1 - m)\ (h - x)\ r.l.\cot v}{a\ E\ (h - x)^n}$$

Combinando (1) y (2)

$$(3) \quad m = \frac{\dfrac{r\ l\ \cot v\ (h - x)}{(h - x)^n}}{\dfrac{2}{a^2}\left(\dfrac{(h - x)^{5-3n} - h^{5-3n}}{(4 - 3n)\ (5 - 3n)} + \dfrac{h^{4-3n}\ x}{4 - 3n}\right) + \dfrac{r.l.\cot v\ (h - x)}{(h - x)^n}}$$

Para aplicar la fórmula (3) debemos determinar previamente los valores de *a* y *n*, de manera que la expresión,

$$y = a\ (h - x)^n$$

se acerque en lo posible a la curva del tranque.

La ecuación elejida debe pasar por el punto A. (fig. 6). Tomemos los puntos B, C y D convenientemente distribuídos a distintas alturas y elijamos los valores de *a* y *n* de modo que el error de la curva resultante sea mínimo.

San E_1 ; E_2 ; E_3 ; las diferencias entre los valores reales y los dados por la ecuación, para las ordenadas de los puntos B, C y D; entonces,

$$2.50 + E_1 = a\ 5^n$$

$$8.50 + E_2 = a\ 20^n$$

$$12.50 + E_3 = a\ 40^n$$

Los valores de *a* y *n* que reduzcan a un mínimo estos errores, se obtendrán haciendo, $\Sigma \Delta^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 =$ mínimo; es decir que la derivada de esta expresión con respecto a *a* y *n* deben igualarse a cero, y la resolución de esas dos ecuaciones resultantes nos darán los valores de *a* y *n*.

$$E_1 = a\ 5^n - 2.5$$

$$E_2 = a\ 20^n - 8.5$$

$$E_3 = a\ 40^n - 12.5$$

$$\Sigma \Delta^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = (a\ 5^n - 2.5)^2 + (a\ 20^n - 8.5)^2 + a\ 40^n - 12.5)^2 = \text{mín.}$$

Derivando respecto de *a* y *n* resultan las 2 ec. sigs.

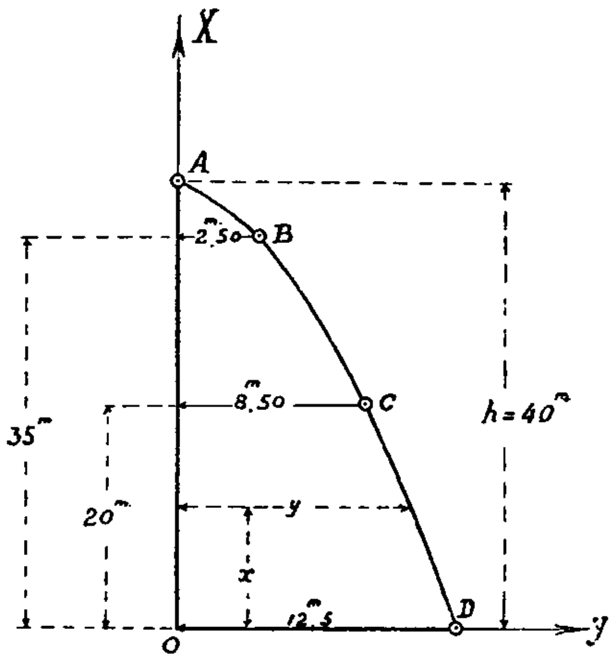

Fig. 6

$$\begin{cases} 2\,(a\ 5^n - 2.5)\ 5^n + 2\,(a\ 20^n - 8.5)\ 20^n + 2\,(a\ 40^n - 12.5)\ 40^n = 0 \\ 2\,(a\ 5^n - 2.5)\ a\ 5^n \operatorname{Log} 5 + 2\,(a\ 20^n - 8.5)\ a\ 20^n \operatorname{Log} 20 + 2\,(a\ 40^n - 12.5) \times \\ \quad a\ 40 \operatorname{Log} 40^n = 0 \end{cases}$$

$$(4)\left\{\begin{array}{l} a\,5^{2n} - 2.5 \times 5^{n} + a\,20^{2n} - 8.5 \times 20^{n} + a\,40^{2n} - 12.5 \times 40^{n} = 0 \\ a\,5^{2n} \operatorname{Log} 5 - 2.5 \times 5^{n} \operatorname{Log} 5 + a\,20^{2n} \operatorname{Log} 20 - 8.5 \times 20^{n} \operatorname{Log} 20 + a\,40^{2n} \times \\ \operatorname{Log} 40 - 12.5 \times 40^{n} \operatorname{Log} 40 = 0 \end{array}\right.$$

Combinando estas ecuaciones se llega a la expresión:

$$\frac{1 + 2^{4n} \operatorname{Log} 15 + 2^{6n} \operatorname{Log} 35}{1 + 2^{4n} + 2^{6n}} = \frac{2.5 + 8.5 \times 2^{2n} \operatorname{Log} 15 + 12.5 \times 2^{3n} \operatorname{Log} 35}{2.5 + 8.5 \times 2^{2n} + 12.5 \times 2^{3n}}$$

$$\text{Haciendo } 2^{n} = x$$

$$\frac{1 + x^4 \operatorname{Log} 15 + x^6 \operatorname{Log} 35}{1 + x^4 + x^6} = \frac{1 + 3.4 \operatorname{Log} 15\, x^2 + 5 \operatorname{Log} 35\, x^3}{1 + 3.4\, x^2 + 5\, x^3}$$

Finalmente se llega a la ecuación,

$$x^6 - 1.47\, x^5 + 0.89\, x^4 + 0.59\, x^2 - 4.41\, x - 2.02 = 0$$

que, resuelta por aproximaciones. da:

$$x = 1.61$$

$$2^{n} = 1.61 \quad n = \frac{\log 1.61}{\log 2} = \frac{0.207}{0.301} = 0.688$$

He adoptado para *n* el valor $n = {}^{2}/_{3} = 0.667$ que es casi igual al calculado y simplifica las ecuaciones.

Para determinar *a* aplicaremos la primera de las ecuaciones (4).

$$a\,5^{2n} - 2{,}5 \times 5^{n} + a\,20^{2n} - 8.5 \times 20^{n} + a\,40^{2n} - 12.5 \times 40^{n} = 0$$

$$a = \frac{2.5 \times 5^{n} + 8.5 \times 20^{n} + 12.5 \times 40^{n}}{5^{2n} + 20^{2n} + 40^{2n}}$$

$$a = 1.06$$

Reemplazando *a* y *n* por sus valores, la ecuación (3) se transforma en la siguiente:

$$(5)\; m = \frac{\text{r.l. cot v} \sqrt[3]{h - x}}{\frac{x^2}{1.06}\left(h - \frac{x}{3}\right) + \text{r.l. cot v} \sqrt[3]{h - x}} = \frac{\text{r.l. cot v} \sqrt[3]{h - x}}{\frac{x^2}{1.13}\left(h - \frac{x}{3}\right) + \text{r.l. cot v} \sqrt[3]{h - x}}$$

Influencias de las hipótesis aceptadas en los resultados de la fórmula (5).

1) *Simetría de la forma de la quebrada.*—En el caso que nos ocupa no se realiza esta condición porque los costados de la quebrada tienen taludes bastante distintos.

En este caso se puede aplicar también la fórmula aproximada (fig. 7)

$$d' = e' \cot v'$$

$$d' = \frac{(1 - m)(h - x)\, r.l.' \cot v'}{a\, E(h - x)^n}$$

A medida que el ángulo 2 v' aumenta, disminuye el producto l' cot v'; y por consiguiente disminuye el valor de *m* de la ecuación (5). Pero como para las distintas alturas conviene determinar el porcentaje máximo que soporta el muro, he tomado siempre $2\,v = {}^1/_2$ ángulo al centro sustentado por el anillo considerado.

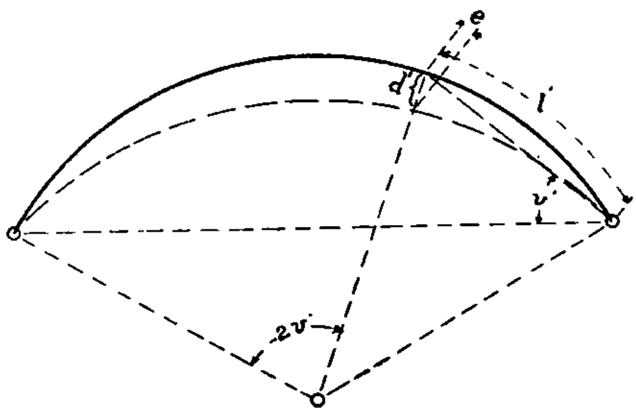

Fig. 7

2) *Encastramiento en los apoyos.*—Estos tendrán por efecto aumentar la rijidez del arco, correspondiendo al muro un porcentaje inferior que el fijado por la ecuación (5).

3) *Lonja de muro de la unidad de longitud.*—Esta unidad deberá medirse en la cara aguas arriba según la ecuación de momentos aplicada. Esto será exacto para un tranque recto o en curva de radio suficiente que sea despreciable su espesor frente al radio. Para las partes superiores se tendrá bastante aproximación; no así en la parte baja de tranque, pues si tomamos la unidad de longitud en la cara aguas arribas y trazamos secciones transversales resultará para la cara

aguas abajo poco más de $\frac{1}{2}$;— por consiguiente, en la expresión del momento de inercia $I = \frac{b\,y^3}{12}$, el valor de *b* es sencillamente inferior a la unidad; la solución analítica de este punto conduciría a expresiones sumamente complicadas, quizá insolubles.

Al adoptar b = 1 para toda la altura del tranque resulta que en la ecuación (5) aumenta el valor de *m* para las partes bajas del tranque, e. d. que exajera la parte de carga que recoje el muro.

4) *Empotramiento del tranque inamovible.*—Esta hipótesis, por muy firme que sea la roca de fundación, no se cumple rigurosamente, ya que la roca deberá deformarse bajo la acción de las fuerzas que le transmita el tranque. Esto tendrá por resultado un aumento de la fracción de carga que recoje el arco en la base.

Resumiendo, las hipótesis aceptadas tienden todas a exajerar la carga recojida por el muro; es decir a desmejorar la solución ideal que consistirá en que el tranque trabajará exclusivamente como arco.

Apliquemos la fórmula (5) en una serie de secciones distantes de cinco metros unas de otras.

1.ª Sección (coronamiento del tranque);

$$x = h$$

$$m = 0$$

2.ª Sección $\left\{\begin{array}{l} x = 35 \text{ m.} \\ r = 46.3 \text{ m.} \\ l = 47 \text{ m.} \\ v = 28^\circ \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $$m = \frac{r.l.\cot v \sqrt[3]{h - x}}{\frac{x^2}{1.13}\left(h - \frac{x}{3}\right) + r.l.\cot v.\sqrt[3]{h - x}} = 0{,}14$$

3.ª Sección $\left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ r = 43.7 \\ l = 42.5 \\ v = 27^\circ \frac{1}{3} \end{array}\right.$ $m =$ 0,24

4.ª Sección $\left\{\begin{array}{l} x = 25 \\ r = 41.2 \\ l = 40.5 \\ v = 26^\circ \end{array}\right.$ $m =$ 0,33

5.ª Sección
$x = 20$
$r = 38.4$ $m =$ 0,41
$l = 35.3$
$v = 23^{o}\,{}^{3}/_{4}$

6.ª Sección
$x = 15$ m
$r = 34.5$ m $m =$ 0,52
$l = 29$ m
$v = 21^{o}$

7.ª Sección
$x = 10$ m
$r = 30.4$ m $m =$ 0,67
$l = 21.7$ m
$v = 17^{o}\,{}^{1}/_{2}$

8.ª Sección
$x = 5$ m.
$r = 25$ m $m =$ 0,85
$l = 16.2$ m
$v = 15^{o}$

9.ª Sección (Base del tranque) — $x = 0$; $m = 1{:}00$.

Tensiones iniciales

Ahora que tenemos determinada la distribución del empuje entre arco y muro para las diversas alturas del tranque, y para la sección transversal más solicitada; nos queda por estudiar otro fenómeno que se produce en los tranques en bóveda. Las fórmulas anteriores no toman en cuenta las tensiones iniciales; por consiguiente, antes de distribuir el empuje entre el arco y muro será preciso determinar qué parte de éste es contrarrestado por las tensiones iniciales; Sólo después de deducida esta parte se repartirá la solicitación restante entre muro y arco.

Por tensiones iniciales se entiende principalmente aquellas debidas al peso propio de la obra y las que se desarrollan por la presión del agua;—estas tensiones iniciales son máximas cerca de la fundación y se anulan en la parte superior del tranque.

Consideremos un tranque en bóveda y estudiemos una lámina de concreto recién estendida, según el eje A C B. (fig. 8).

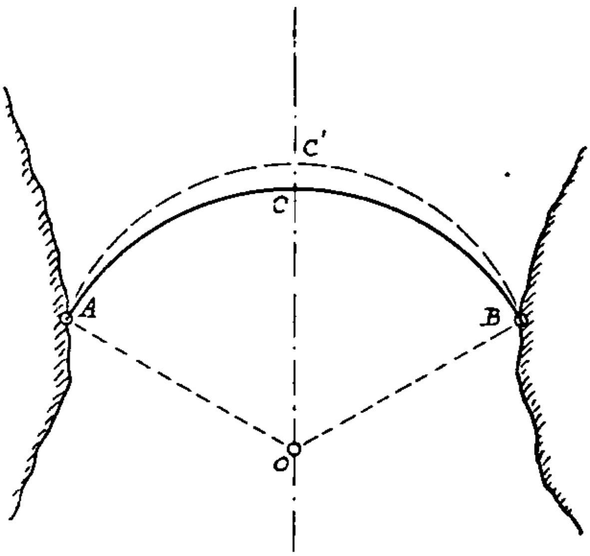

Fig. 8

Este material no resiste esfuerzo exterior alguno y su posición de equilibrio en estas condiciones tendrá su eje según A C B. Al proseguir la construcción del tranque, esta lámina deberá soportar el peso de la mampostería de encima que desarrollará un esfuerzo de comprensión seguido de un acortamiento en el sentido de la fuerza (vertical) y un ensanchamiento laterales; este ensanchamiento lateral se opera libremente en sentido normal al eje del anillo, más no así según el eje de dicho anillo, debido a que los empotramientos en A y B le impiden alargarse en ese sentido; por consiguiente el alargamiento del anillo debido al ensanchamiento lateral se traducirá en una contra flecha, transportándose el nuevo eje a A C' B.

Según esto, un anillo cualquiera del tranque antes de ser solicitado por el empuje del agua no está en su posición de equilibrio A C B, sino que debido al peso de la albañilería que gravita sobre él se ha deformado tomando una contra flecha C C'; luego el anillo considerado deberá absorber una parte del empuje del agua para volver a su situación de equilibrio A C B.

Ahora la condición del tranque lleno introduce una fuerza adicional, la presión radial del agua, que tiende a comprimir el cuerpo del tranque en una dirección normal a la fuerza debida al peso de la obra; en este caso la presión radial del agua tiende a contrarrestar el ensanchamiento del concreto debido al peso propio en las caras aguas arriba y aguas abajo, provocando ensanchamientos transversales que se desarrollan libremente en el sentido vertical y producen un alargamiento del eje del anillo con la contraflecha correspondiente debido a la inomovibilidad de los empostramientos.

Según esto, antes de distribuir la acción del empuje del agua entre muro y arco aplicando la ecuación (4), será preciso determinar la fracción del empuje que

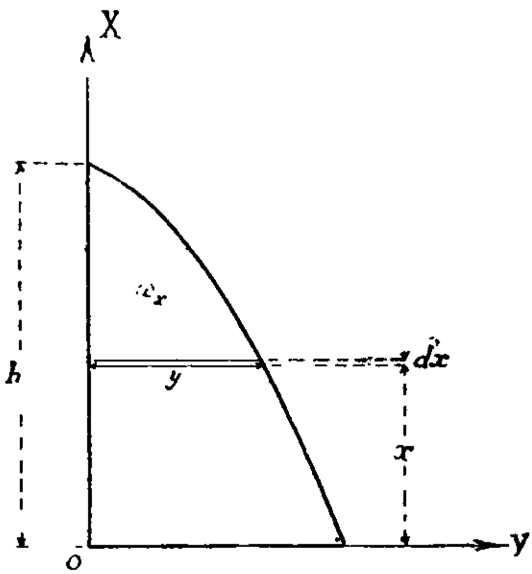

Fig. 9

estas acciones iniciales (peso propio y presión radial del agua) absorben, para que el anillo vuelva a su posición de equilibrio.

Sea h la altura del tranque, (fig. 9) aceptando para el concreto una densidad $\delta = 2.40$, la presión vertical media p_x a una altura x de la base del tranque, debida al peso propio, puede expresarse como sigue:

$$p_x = \frac{\delta\, \omega_x}{y_x}$$

$$\omega_x = \int_x^h y\, dx$$

$$p_x = \frac{\delta \int_x^h y\, dx}{y} \;;\; y = a\,(h - x)^n$$

$$p_x = \frac{\delta a \int_x^h (h-x)^n dx}{a(h-x)^n} = \frac{\delta \frac{(h-x)^{n+1}}{n+1}}{(h-x)^n} = \frac{\delta}{n+1}(h-x)$$

es decir que la presión es proporcional a la altura del muro sobre la sección considerada.

Para el caso que nos ocupa $\delta = 2.40$; $n = {}^2/_3$, luego ,

$$p_x = 1.45\,(h-x)$$

La comprensión p'_x en la misma seccion debida a la presión radial del agua es igual a la altura de agua sobre el punto considerado: $p'_x = h - x$.

Estas comprensiones provocan acortamientos en el sentido de las solicitaciones y un alargamiento hacia los costados. Según las experiencias de M. Poisson y otros la razón entre el ensanche lateral y el acortamiento en el sentido de la fuerza es aproximadamente $^1/_5$ para el concreto. El peso de la albañilería y la presión radial del agua producen ensanches laterales en el sentido del eje del anillo considerado que se suman; luego la resultante r_x de las compreńsiones ini ciales según este eje, y para la sección considerada, estando el tranque lleno, es:

$$r_x = \frac{1}{5}\left\{\frac{\delta}{n+1}(h-x) + (h-x)\right\} = \frac{1}{5} \times 2.45\,(h-x)$$

$$r_x = 0.49\,(h-x)$$

Por consiguiente, la altura h'_x de carga de agua que será contrarrestada a la altura x de la base del tranque, (estando éste lleno), la contra-flecha debida a la resultante r_x de las comprensiones iniciales, sin que se produzca acortamiento real en el largo del arco, se determina aplicando la fórmula de Napier:

$$y = \frac{R_u\, h'_x}{t}\,;\; h'_x = \frac{t\,y}{R_u}$$

$$t = 0{,}49\,(h-x)$$

$$y = a\,(h-x)^u$$

$$h'_x = \frac{t\,y}{R_u} = \frac{0{,}49\,a\,(h-x)^{n+1}}{R_u} \left\{ \begin{array}{l} a = 1.06 \\ n = {}^2/_3 \end{array} \right.$$

$$h'_x = \frac{0{,}52\,(h-x)^{1\frac{2}{3}}}{R\,u}$$

Fl dato que nos interesa es el porcentaje del empuje contrarrestado en la sección considerada por las tensiones iniciales, e.d. la relación $m' = \frac{h'_x}{h-x}$

$$(6) \quad m' = \frac{h'_x}{h-x} = \frac{0{,}52\,(h-x)^{2/3}}{R_u} = \frac{0{,}52\,\sqrt[3]{(h-x)^2}}{R_u}$$

Apliquemos la fórmula (5) para las mismas secciones en que ya aplicamos la fórmula (4).

1.ª Sección (coronamiento del tranque); $x = h$; $m' = 0$

2.ª Sección $\begin{cases} R_u = 47.5 \\ x = 35 \end{cases}$ $m' = 0{,}03$

3.ª Sección $\begin{cases} R_u = 46 \\ x = 30 \end{cases}$ $m' = 0{,}05$

4.ª Sección $\begin{cases} R_u = 44.5 \\ x = 25 \end{cases}$ $m' = 0{,}07$

5.ª Sección $\begin{cases} R_u = 42.6 \\ x = 20 \end{cases}$ $m' = 0{,}09$

6.ª Sección $\begin{cases} R_u = 39.5 \\ x = 15 \end{cases}$ $m' = 0{,}11$

7.ª Sección $\begin{cases} R_u = 36 \\ x = 10 \end{cases}$ $m' = 0{,}14$

8.ª Sección $\begin{cases} R_u = 31 \\ x = 5 \end{cases}$ $m' = 0{,}18$

9.ª Sección $\begin{cases} R_u = 25 \\ x = 0 \end{cases}$ $m' = 0.24$

Resumiendo, los coeficientes *m'* nos dan el porcentaje de empuje que absorben las tensiones iniciales el cual es contrarrestado por el arco. El empuje restante $(1-m')$ se divide entre arco y muro, correspondiéndole un porcentaje *m* al muro y lo restante al arco. Luego el porcentaje *m"* del empuje total que corresponde al muro para una sección cualquiera será:

$$m'' = m\,(1-m')$$

$$m'' = \frac{r.\ l.\ \cot v.\ \sqrt[3]{h-x}}{\frac{x^2}{1.13}\left(h - \frac{x}{3}\right) + r.\ l.\ \cot v.\sqrt[3]{h-x}} \left(1 - \frac{0.52\ (h-x)^{2/3}}{R_u}\right)$$

Los valores de *m''* para las diversas alturas del tranque son las siguientes:

Para x = h	;	m'' = 0,00
» x = 35	;	m'' = 0,14
» x = 30	;	m'' = 0,23
» x = 25	;	m'' = 0,31
» x = 20	;	m'' = 0,37
» x = 15	;	m'' = 0,46
» x = 10	;	m'' = 0,58
» x = 5	;	m'' = 0,70
» x = 0	;	m'' = 0,76

Determinada la repartición de la carga entre muro y arco, es posible determinar las tensiones desarrolladas en una sección cualquiera provocadas por cada una de las solicitaciones indicadas (~~arco~~ y muro).

Con lo que respecta al arco, con la hipótesis aceptada de que trabaja a la comprensión simple, y recordando que la sección que verificamos ha sido determinada suponiendo que solamente trabaje el arco a una tasa de 10 K. p. c/m², tendremos que la tensión t arco para una sección cualquiera será

$$t\ arco = -\ (1 - m''_x)\ 10$$

Aplicando esta fórmula para las distintas secciones del arco se tiene:

		r arco K	
Para x = h = 40	—	10,0	p. c/m²
» x = 35	—	8,6	» »
» x = 30	—	7,7	» »
» x = 25	—	6,9	» »
» x = 20	—	6,3	» »
» x = 15	—	5,4	» »
» x = 10	—	4,2	» »
» x = 5	—	3,0	» »
» x = 0	—	2,4	» »

Esta compresión se ejerce en un plano horizontal, en el sentido del eje del anillo.

Continuará.