LOS MÉTODOS DE INTEGRACION

POR

CÁRLOS WARGNY

(Continuacion)

xi. $$d\,y = \frac{d\,x}{x^{n-1}} \therefore y = \int_x x^{-n+1} = \frac{x^2}{(2-n)x^n}$$

xii. $$\int_x \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

xiii. $$d\,y = \sqrt[3]{x}\,d\,x \therefore y = \int x^{\frac{1}{3}}\,d\,x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$$ (Greenhill, 87)

xiv. $$d\,y = \sqrt[n]{x}\,d\,x \therefore y = \frac{n}{1+n}\sqrt[n]{x^{1+n}}$$

xv. $$y = \int_x \frac{1}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x}$$ (Williamson, 3)

xvi. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_x x^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}$$

xvii. $dy = \sqrt{x^3}\, dx \therefore y = \int_x x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$

xviii. $y = \int \sqrt[n]{x^m}\, dx = \int_x x^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}}$

xix. $\int \frac{1}{\sqrt{x^n}}\, dx = \int_x x^{-\frac{n}{2}} = \frac{2}{2-n}\sqrt{x^{2-n}}$

xx. $\int_x \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = \int x^{-\frac{n}{m}}\, dx = \frac{n}{m+n}\sqrt[m]{x^{m-n}}$

22. *Funciones aljebraicas monomias.*—Las reglas anteriores del signo, coeficiente i esponente, sirven para integrar toda clase de funciones aljebraicas monomias.

Ejemplo:

$$\int -2\, a\, x^3\, x^4\, dx = -\frac{2}{5} a^3\, x^5$$

Ejercicios

i. $\int_x a = \int a\, dx = a\, x$

ii. $\int 3\, x^2\, dx = 3 \int_x x^2 = x^3$

iii. $y = \int -\frac{4}{5} x^3\, dx = -\frac{4}{5} \cdot \frac{x^4}{4} = -\frac{1}{5} x^4$

iv. $dy = \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \therefore y = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

v. $\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$

vi. $y=\int \frac{a\,d\,x}{b\,x^{-n}}=\frac{a\,x}{b\,(n+1)}\,x^{n}$

vii. $\acute{u}\,y=\sqrt{2\,x^{3}}\,d\,x\,.\therefore y=\frac{3}{4}\sqrt{2}\,x\,\sqrt[3]{x}$

viii. $d\,y=a\sqrt[m]{b\,x^{n}}\,d\,x\,.\therefore y=\frac{a\,m\sqrt{b}}{m+n}\sqrt[m]{x^{m+n}}$

ix. $\int_{x}\frac{a}{b\,x^{\frac{4}{3}}}=-\frac{3\,a}{b\sqrt[3]{x}}$

x. $y=\int\frac{d\,x}{x^{\frac{n-1}{n}}}=n\sqrt[n]{x}$ (Williamson, 4)

xi. $\int\frac{(a+b)\,x^{\frac{m+n}{p}}}{(a-b)\,x^{\frac{m-n}{q}}}d\,x=$

$$\frac{(a+b)\,p\,q}{(a-b)\,[q\,(m+n+p)+p\,(n-m)\,]}\sqrt[pq]{x^{(m+n+p)\,q+n-m)\,p}}$$

xii. $\int_{x}m\,[\alpha\;(a,b,c)]^{m+1}\,[f\,(z)\,]^{m-1}=[\alpha\;(a,b,c)\,]^{m+1}\,[f(x)\,]^{m}$

23. *Variable ausiliar.*—Para facilitar la integracion de las funciones compuestas, se representan uno o mas términos de la funcion por una sola variable *ausiliar.*

i. Por ejemplo, se trata de integrar la *ecuacion diferencial,* es decir, la espresion de igualdad entre derivadas i diferenciales:

$$d\,y=(a+x)\;d\,x,$$

o bien,

$$y=\int\,(a+x)\,d\,x.$$

Hacemos

$$a+x=z \therefore d\,(a+x) \text{ o } d\,x=d\,z;$$

sustituimos ahora la variable ausiliar *z:*

$$y=\int z\,d\,z.$$

Aplicamos la regla del esponente

$$y=\frac{1}{2}\,z^2,$$

i sustituimos la variable independiente:

$$y=\frac{1}{2}\left(a+x\right)^2$$

En esta operacion está fundada la *integracion por sustitucion.*

Obsérvese que en la sustitucion, hai que espresar la derivada i la diferencial en funcion de la variable ausiliar *z.*

ii. $\int (a+b\,x)^2\,b\,d\,x=\int z^2\,b\,d\,z=\frac{1}{3}\,b\,(a+b\,x)^3$

iii. $\int (a+b\,x^2)^n.\,2\,b\,x\,d\,x=\int z^n.\,2\,b\,d\,z=\frac{2\;b}{n+1}\,(a+b\,x^2)^{n+1}$

24. *Trasposicion de la variable.*—Para diferenciar la funcion:

$$y=f\,(x)$$

se indica:

$$d\,y=d\,f\,(x)$$

i se efectúa:

$$d\,y=f'\,(x)\,d\,x.$$

Integrando, tendremos.

$$y = \int f'(x)\, dx$$

o bien,

$$y = \int d\, f(x).$$

La trasformacion de $f'(x)\, dx$ en $d f(x)$, es una de las trasposiciones que puede tener la variable o la funcion.

La trasposicion del signo i coeficiente (Núm. 17 i 19) de una integral, tambien se aplica a una diferencial, posponiéndolos al signo de diferenciacion.

Ejercicios

i. $\int (\pm d\, x) = \int d\, (\pm x) = x$

ii. $\int a\, d\, x = \int d\, (a\, x) = a\, x$

iii. $\int \frac{1}{m}\, m\, d\, x = \frac{1}{m} \int d\, m\, x = x$

iv. Sea ahora

$$y = \int 2\, x\, d\, x.$$

Vemos que

$$2\, x\, d\, x = d\, x^2;$$

luego,

$$\int 2\, x\, d\, x = \int d\, x^2 = x^2$$

v. $\int (a+x)^2\, d\,x = \int (a+x)^2\, d\,(a+x) = \int z\, 2\, d\,z = \frac{1}{2}\,(a+x)^2$

En este ejemplo empleamos la variable ausiliar, para hacer mas evidente la aplicacion de la regla.

vi. $\int (a-b\,x^2)\,(-2\,b\,x)\,d\,x = \int (a-b\,x^2)\,d\,(a-b\,x^2) = \frac{1}{2}\,(a-b\,x^2)^2$

25. *Producto de la potencia de una funcion por su diferencial.*—En la fórmula del esponente:

$$\int x^n\, d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

hai que observar que x^n es la potencia de la funcion simple x i que $d\,x$ es una diferencial. Segun ésto, si u es una funcion de x i $d\,u$ su diferencial, tendremos:

$$\int u^n\, d\,u = \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

Para hacer mas jeneral esta regla, la mas importante de la integracion, consideremos la funcion compuesta $f\,x$, su diferencial $d\,f\,x$ i una potencia de dicha funcion $(f\,x)^n$; encontraremos:

$$\int (f\,x)^n\, d\,f\,x = \frac{(x)^{n+1}}{n+1}.$$

Obsérvese ademas que siendo $d\,f\,x = f'\,(x)\,d\,x$, la fórmula anterior se escribe:

$$\int [f\,(x)]^n\, f'\,(x)\, d\,x = \frac{[f\,(x)]^{n+1}}{n+1}$$

Ejercicios

i. $\int (1+x)\,dx = \int (1+x)\,d(1+x) = \frac{1}{2}(1+x)^2$

ii. $\int (a+bx)\,b\,dx = \int (a+bx)\,d(a+bx) = \frac{1}{2}(a+bx)^2$

iii. $y = \int (a-x)(-dx) = \int (a-x)\,d(a-x) = \frac{1}{2}(a-x)^2$

iv. $dy = (1+x^2)^3\,2x\,dx \therefore y = \int (1+x^2)^3\,d(1+x^2) = \frac{1}{4}(1+x^2)$

v. $f(x) = \int (ax-b)^2\,a\,dx = \frac{1}{3}(ax-b)^3$

vi. $\int (3x^2-2x)^3(6x-2)\,dx = \frac{1}{4}(3x^2-2x)^4$

vii. $\int (a+bx+cx^2)^n(b+2cx)\,dx = \frac{(a+bx+cx^2)^{n+1}}{n+1}$

viii. $\int_x \sqrt{a+x} = \int (a+x)^{\frac{1}{2}}\,d(a+x) = \frac{2}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}$

ix. $\int_x \sqrt[3]{ax^2-bx^3}\,(2ax-2bx^2 = \frac{2}{5}(ax^2-bx^3)^{\frac{5}{2}}$

x. $\int (ax^m+bx^n)^{\frac{p}{q}}(max^{n-1}+nbx^{n-1})\,dx =$

$$\frac{q(ax^m+bx^n)^{\frac{p+q}{q}}}{p+q}$$

Observacion.—En todos estos ejercicios se puede hacer la integracion por sustitucion; prefiriéndose, sin embargo, el método empleado, porque es mas breve.

26. *Diferencial incompleta.*—En las integrales compuestas jeneralmente sucede que la diferencial no es completa, es decir, $d\,f\,x$ es diferencial de $f\,x$ con un coeficiente de ménos. Para hacer la integracion en este caso, hai que *completar* la diferencial, introduciendo el coeficiente que falta, tal como se indicó en el número 20.

Ejercicios

i. $\int (a+b\,x)\,d\,x$. Aquí $f\,x = a+b\,x$ y $d\,f\,x = b\,d\,x$; falta pues el coeficiente b que introducimos así:

$$\int (a+b\,x)\,d\,x = \int \frac{b}{b}(a+b\,x)\,d\,x = \frac{1}{b}\int (a+b\,x)\,b\,d\,x = \frac{(a+b\,x)^2}{2\,b}$$

Véase ejercicio ii, N.º 25.

ii. $$\int (3\,x^2-2\,x)^3(3\,x-1)\,d\,x = \frac{1}{2}\int (3x^2-2x)^3(6x-2)\,d\,x = \frac{(3\,x^2-2\,x)^4}{8}$$

iii. $$\int \sqrt{a^2+x^3}\,.\,x^2 d\,x = \frac{1}{3}\int (a^2+x^3)^{\frac{1}{2}}\,3\,x^2 d\,x = 2\,(a^2+x^3)^{\frac{3}{2}}$$

27. *Cuociente de una diferencial i de la potencia de una funcion.*—Es evidente que la misma regla anterior se aplica a la integral

$$y = \int \frac{d\,f\,x}{(f\,x)^n},$$

porque podemos referirla a un producto:

$$y = \int (f\,x)^{-n}\,d\,f\,x = \frac{(f\,x)^{1-n}}{1-n}.$$

Ejercicios

i. $\displaystyle\int \frac{d\,x}{(1+x)^2} = \int (1+x)^{-2}\,d\,(1+x) = -\frac{1}{1+x}$

ii. $\displaystyle\int \frac{b+2\,c\,x}{{}_{x}(a+b\,x+c\,x^2)^n} = \frac{(a+b\,x+c\,x^2)^{1-n}}{1-n}$

iii. $\displaystyle\int \frac{a+2\,b\,x}{{}_{x}\sqrt[5]{a\,x+bx^2}} = \frac{5}{4}\,(ax+b\,x^2)^{\frac{4}{5}}$

iv. $\displaystyle y = \int \frac{m\,a\,x^{m-1} \pm n\,b\,x^{n-1}}{{}_{x}\sqrt[p]{a\,x^m \pm b\,x^n}} = \frac{p\,(ax^m \pm b\,x^n)^{\frac{p-1}{p}}}{p-1}$

v. $\displaystyle\int {}_{x} \frac{x\,d\,x}{(a + x^2)^3} = \frac{1}{2}\int (a^2+x^2)^{-3}\,2\,x\,d\,x = \frac{-1}{4\,(a^2+x^2)^2}$

vi. $\displaystyle\int \frac{x^2 d\,x}{\sqrt{1+x3}} = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\,3\,x^2\,d\,x = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$

28. *Esponente* — 1. - Cuando el esponente de la funcion es igual a — 1, la regla del esponente no se puede aplicar.

En efecto, sea la integral

$$y = \int \frac{dx}{x}.$$

La regla del esponente nos da

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Proviene esta solucion infinita, de que la diferencial propuesta sale de una funcion trascendente:

$$y = Lx = . dy = \frac{dx}{x};$$

luego

$$\int \frac{dx}{x} = Lx.$$

Designamos por L el logaritmo napierano o de base *e*.

29. *Integral-logaritmo.*— La integral de una fraccion cuyo numerador es la diferencial exacta del denominador, es igual al logaritmo del denominador:

$$\int \frac{dx}{x} = Lx$$

En jeneral, tendremos:

$$\int \frac{d\,f\,x}{f\,x} = L\,f\,x,$$

o bien,

$$\int (f\,x)^{-1}\,d\,f\,x = L\,f\,x.$$

Ejercicios

i. $\int a\,\frac{d\,x}{x} = a\int \frac{d\,x}{x} = a\,L\,x$ (Carnot, 88)

ii. $\int \frac{1}{x+a}\,d\,x = \int \frac{d\,(x+a)}{x+a} = L\,(x+a)$. (Perry, 38),

iii. $y = \int \frac{2\,x\,d\,x}{a+x^2} = \int (a+x^2)^{-1}\,d\,(a+x^2) = L\,(a+x^2)$

iv. $d\,y = \int \frac{2\,x\,d\,x}{a+x^2}\ \therefore\ y = L\,(a+x^2)$

v. $\int_x \frac{b+2\,c\,x}{a+b\,x+c\,x_2} = L\,(a+b\,x+c\,x^2)$ (Price, 19)

vi. $\int_x \frac{x\,d\,x}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\,x\,d\,x}{a^2-x^2} + -\frac{1}{2}\,L\,(a^2-x^2)$

30. *Diferencia entre* $\int \frac{d\,f\,x}{(f\,x)^n}$ i $\int \frac{d\,f\,x}{f\,x}$.

El principiante debe distinguir estas dos integrales que tienen valores mui distintos:

$$\int \frac{d\,f\,x}{(f\,x)^n} = \int (f\,(x)^{-n}\,d\,f\,x = \frac{(f\,x)^{1-n}}{1-n}$$

$$\int \frac{d\,f\,x}{f\,x} = \int (f\,x)^{-1}\,d\,f\,x = L\,f\,x$$

En el primer caso el esponente es diferente de —1 i en el segundo es igual a —1.

Los ejercicios que siguen hacen mas evidente esta diferencia:

i. $\int \frac{1}{x^2}\,d\,x \;=\; \int_x x^{-2} \;=\; -\frac{1}{x}$

ii. $\int \frac{1}{x}\,d\,x \;=\; \int_x x^{-1} \;=\; L\,x$

iii. $\int d\,x \;=\; \int_x x^0 \;=\; x$

iv. $\int x\,d\,x \;=\; \int_x x \;=\; \frac{1}{2}\,x^2$

v. $\int_x \frac{2\,a\,x - b}{\sqrt{a\,x^2 - b\,x}} = \int (a\,x^2 - b\,x)^{-\frac{1}{2}}\,d\,(a\,x^2 - b\,x) =$

$$2\,\sqrt{a\,x^2 - b\,x}$$

vi. $\int_x \frac{2\,a\,x - b}{a\,x^2 - b\,x} = \int (a\,x^2 - b\,x)^{-1}\,d(a\,x^2) - b\,x = L(a\,x^2) - b\,x$

31. *Regla de la suma.*—La integral de una suma de diferenciales es igual a la suma de sus integrales:

$$\int (d\,u \pm d\,v) = \int d\,u \pm \int d\,v = u \pm v.$$

Lo que es evidente, porque es la regla inversa de la diferenciacion de una suma de funciones:

$$d\,(u \pm v) = du \pm dv.$$

Segun esta regla, tendremos que

$$\int (a\,x^2 + b\,x + c)\,d\,x = \int_x a\,x^2 + \int_x b\,x + \int_x c =$$

$$\frac{a\,x^3}{3} + \frac{b\,x^2}{2} + c\,x;$$

i que

$$\int (F'\,x\,d\,x \pm f'x\,d\,x \pm \ldots\ldots) = f\,x \pm f\,x \pm \ldots\ldots$$

32. *Polinomios aljebraicos enteros.*—La regla de la suma se emplea para integrar los polinomios aljebraicos enteros.

$$\int \left(A\,x^n - \frac{B}{x^m} + C\,\sqrt{x} - \frac{D}{x}\right) d\,x$$

$$= \int_x A\,x^n - \int_x B\,x^{-m} + \int_x C\,x^{\frac{1}{2}} - \int_x D\,x^{-1}$$

$$= A\,\frac{x^{n+1}}{n+1} - B\,\frac{x^{1-m}}{1-m} + \frac{2\,C\,x^{\frac{3}{8}}}{3}\,D\,L\,x.$$

En esta regla se funda la *descomposicion aljebraica.*

Ejercicios

i. $\int(x-x^2)d\,x \quad = \int_x x - \int_x x^2 = \frac{1}{1}x^2 - \frac{1}{0}x^3$

ii. $y = \int\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right) d\,x = \int_x a\,x^{-2} + b\int_x x^{-2} =$

$$a\,L\,x - \frac{b}{x}$$

iii. $d\,y = \left(\sqrt{x} \pm \sqrt[3]{x}\right) d\,x \therefore y = \int_x x^{\frac{1}{2}} \pm \int_x x^{\frac{3}{2}} =$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \pm \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

iv. $\int(4\,x^3 - 5\,x^2 - 3\,x + 8)\,d\,x = x^4 - \frac{5}{3}x^3$

$- \frac{3}{2}x^2 + 8\,x$. (Sturm, I, 314)

v. $\int_x (a\,x^{\frac{3}{2}} - b\,x^{-\frac{4}{5}} + c\,x^{-1}) = \frac{2}{5}a\,x^{\frac{5}{2}}$

$$-5\,b\,x^{\frac{1}{5}} + c\,L\,x$$

v. $\int(A\,x^p + B\,x^q + C\,x^r + \ldots) = \frac{A}{p+1}x^{p+1} + \frac{B}{q+1}x^{q+1}$

$$+\frac{A}{r+1}x^{r+1}+\ldots \text{ (Fourcy, 336)}$$

vii. $$\int_x\left(\frac{a}{1+ax}+\frac{2bx}{1-bx^2}+\frac{a+2bx}{\sqrt{ax+bx^2}}\right)=$$

$$L\frac{1+ax}{1-bx^2}+\sqrt{ax+bx^2}$$

33. *Integral producto.*—La integral de la suma de los productos de dos funciones de x por sus diferenciales enteras es igual al producto de las funciones:

$$\int(u\,dv+v\,du)=uv.$$

En efecto,

$$d(uv)=u\,du+v\,du.$$

34. *Integracion por partes.*—Desarrollemos la integral anterior:

$$\int u\,dv+\int v\,du=uv;$$

i despejemos el primer término:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Esta fórmula tiene gran importancia en la integracion i sirve para integrar las funciones irracionales i trascenden tes. (Núms. 36, 39 i Cap. VI).

Integral fraccion.—La regla inversa de la diferenciacion de una fraccion nos da igualmente la fórmula:

$$\int \frac{u\,d\,v - v\,du}{v^2} = \frac{u}{v}$$

o bien

$$\int \left(\frac{u\,d\,v}{v^2} - \frac{d\,u}{v} \right) = \frac{u}{v}$$

$$\therefore \int \frac{u\,d\,v}{v^2} = \int \frac{d\,u}{v} + \frac{u}{v} \quad \text{(Lardner, 176)}$$

Esta fórmula no tiene aplicacion.

35. *Funciones esponenciales.*—Sea la funcion esponencial

$$y = a^x$$

i apliquemos logaritmos a sus dos miembros:

$$L\,y = x\,L\,a$$

Diferenciando,

$$\frac{d\,y}{y} = L\,a\,d\,x$$

Despejando la $d\,y$ i reemplazando el valor de y, se llega a la diferencial:

$$d\,y = a^x\,L\,a\,d\,x$$

Integrando,

$$y = \int a^x\,L\,a\,d\,x$$

obtendremos

$$y = a^x$$

En consecuencia, siendo

$$\int a^x \, L\, a \, d\, x = L\, a \int a^x \, d\, x = a^x$$

$$\therefore \int a^x \, d\, x = \frac{a^x}{L\, a}$$

Podemos emplear un método mas sencillo, haciendo

$$a^x = z \;\therefore\; d\, x = \frac{d\, z}{z\, L\, a} \;\therefore\; \int_x a^x = \int \frac{d\, z}{L a} = \frac{z}{L a} = \frac{a^x}{L a}$$

Ejercicios

i. $\int e^x \, d\, x = \dfrac{e^x}{\angle\, e} = e^x$

ii. $\int (a + b)^x \, d\, x = \dfrac{(a + b)^x}{L\, (a + b)}$

iii. $\int a^{nx} \, d\, x = \int z \, \dfrac{d\, z}{n\, z\, L\, a} = \dfrac{1}{n\, L\, a} \int d\, z = \dfrac{a^{nx}}{n\, L\, a}$

iv. $\int \dfrac{d\, x}{a\, x} = \int a^{-x} \, d\, x = -\dfrac{a^{-x}}{\angle a} = -\dfrac{1}{a^x \, L\, a}$

v. $\int a^x \, e^x \, d\, x = \int m^x \, d\, x = \dfrac{m^x}{L\, m} = \dfrac{a^x\, e^x}{L\, a + 1}$

(Osborne, 181)

36. *Funciones logarítmicas.*—La diferencial

$$dy = Lx\,dx$$

no es de integracion inmediata; pero podemos integrarla fácilmente empleando la integracion por partes (Núm. 34).

Sean

$$u = Lx \quad \therefore \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$v = x \quad \therefore \quad dv = dx$$

Reemplacemos ahora estos valores en la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du:$$

$$\int Lx\,dx = x\,Lx - \int x\,\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \; y = x\,Lx - x.$$

Este resultado puede tomar dos fórmulas diferentes que conviene conocer.

En primer lugar, hacemos monomia la espresion, escribiendo sucesivamente,

$$\begin{aligned} y &= x\,Lx - x = x\,(Lx - 1) \\ &= x\,(Lx - Le) \\ &= x\,L\frac{x}{e} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{y}{x} = L\,\frac{x}{e};$$

i en segundo lugar, para hacer desaparecer el signo L, suponemos $e^z = \frac{x}{e} \therefore z = L\,\frac{x}{e} = \frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{y}{e\,x} = \frac{x}{e}$$

o bien

$$x = e\,\frac{y+x}{x}$$

Del mismo modo podemos obtener las nuevas fórmas:

$$L\,x = \frac{y+x}{x},\quad y+x = L\,x^x,\quad x^x = e^{y+x}$$

37. *Integrales trigonométricas.*—De la diferenciacion deducimos las siguientes integrales:

$$d\,\mathrm{sen}\,x = \cos x\,d\,x \qquad \therefore \int_x \cos x = \mathrm{sen}\,x$$

$$d\,\cos x = -\mathrm{sen}\,x\,d\,x \qquad \int_x -\mathrm{sen}\,x = \cos x$$

$$d\,\mathrm{tg}\,x = \sec^2 x\,d\,x \qquad \int_x \sec^2 x = \mathrm{tg}\,x$$

$$d\,\cot x = \mathrm{cosec}^2 x\,d\,x \qquad \int_x \mathrm{cosec}^2 x = \cot x$$

En las reducciones trigonométricas (Núm. 45), veremos que todos estos valores pueden salir de la integral del seno.

Ejercicios

i. $\int a \cos a x \, d x = \int \cos a x \, d a x = \int \cos u \, d u = \operatorname{sen} a x$

ii. $\int -\operatorname{sen} \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} d x = -\cos \frac{x}{a}$

iii. $\int_x \sec^2 (a + x) = \operatorname{tg} (a + x)$

iv. $\int_x \operatorname{cosec}^2 (a x^2 + b x + c) (2 a x + b) = \cot (a x^2 + b x + c)$

v. $\int 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x \, d x = 3 \int \operatorname{sen}^2 x \, d \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^3 x$

v. $\int \cot x = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} d x = \int \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = L \operatorname{sen} x$

38. *Integrales circulares.*—En la diferenciacion de las funciones hemos encontrado:

$$d \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d x, \; d \operatorname{arc} \cos x =$$

$$- (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d x, \text{ etc.}$$

$$\therefore \int \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = - \operatorname{arc} \cos x$$

$$\int \frac{d x}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = - \operatorname{arc} \cot x$$

$$\int \frac{d x}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \sec x = - \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$$

Ejercicios

i. $$\int_x \frac{d\,u}{\sqrt{1-u_2}} = \text{arc sen } u$$

ii. $$\int \frac{d\,\phi\,x}{\sqrt{1-(\phi\,x)^2}} = \text{arc sen } \phi\,x$$

iii. $$\int \frac{m\,d\,x}{\sqrt{1-m^2x^2}} = \int \frac{m\,d\,x}{\sqrt{1-(m\,x)^2}} = \text{arc sen } m\,x$$

iv. $$\int \frac{d\,x}{a\sqrt{1-\frac{x_2}{a^2}}} = \int \frac{d\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc sen } \frac{x}{a}$$

v. $$\int \frac{\sqrt{b}\,d\,x}{\sqrt{a\left(1+\frac{b\,x^2}{a}\right)}} = \int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\,d\,x}{1+\left(\frac{b}{a}\,x\right)^2} =$$

$$\text{arc tg } \sqrt{\frac{b}{a}}\,x$$

39. *Funciones circulares.* – Aunque la diferencial

$$d\,y = \text{arc sen } x\,d\,x$$

no es de integracion inmediata, daremos sin embargo su valor, para completar la lista de las integrales principales.

Sea

$$\text{arc sen } x = u \therefore \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$$

$$dx = dv \therefore v = x$$

i sustituyamos en la fórmula del número 34

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du:$$

$$\int \text{arc sen } x\,dx = x \text{ arc sen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para integrar la nueva integral, completamos la diferencial como se indicó en el número 20:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx = -\sqrt{1-x}$$

$$\therefore \int \text{arc sen } x\,dx = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2}$$

(Appell, 52)

Podemos observar en este resultado que si hacemos

$y = \int_x$ arc sen x, obtendremos

$$\frac{y}{x} - \sqrt{1-x^2} = \text{arc sen } x;$$

i deducir de aquí que

$$x = \text{sen } \frac{y - x\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Los cuatro capítulos que siguen tratan de las trasformaciones que han de tener las funciones compuestas para su integracion inmediata.

Inútil creemos entrar en nuevas esplicaciones sobre los métodos ya espuestos, por lo cual nos limitamos a dar numerosos ejercicios cuyos resultados deberá comprobar el principiante.

CAPITULO III

TRASFORMACIONES ALJEBRÁICAS

40. *Objeto de este estudio.*—Las diferentes trasformaciones que vamos a dar a conocer, tienen por objeto reducir las diferenciales consideradas a una de las formas conocidas:

$$u^n\,du,\ \frac{du}{u},\ \frac{du}{1+u^2},\ \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\ \text{sen}\,u\,du,\ \text{etc.},$$

cuya integracion ya se sabe hacer, y en las cuales u representa una funcion simple o compuesta de x.

41. *Trasposicion de la variable.*—Hemos señalado (Número 24) esta trasformacion, que consiste en *indicar* una diferenciacion, poniendo despues del signo d, la funcion primitiva $f(x)$ o una parte de ella, de modo que resulte evidente una de las formas señaladas mas arriba.

Diferenciales enteras.

1. $y=\int(a+x)\,dx$. Podemos escribir $dx=d(a+x)$, i se obtiene una forma conocida:

$$y=\int(a+x)\,d(a+x)=\int u\,du=\frac{1}{2}(a+x)^2.$$

2. $\int (a+b\,x)^2\, b\, d\,x = \int (a+bx)^2\, d\,(a+b\,x) = \frac{1}{3}\,(a+b\,x)^3$

3. $\int (a - b\,x^m)^n\,(-\,m\,b\,x^{m-1})\,d\,x = \frac{(a - b\,x^m)^{n+1}}{n+1}$

4. $\frac{d\,u}{d\,x} = (a+b\,x+c\,x^2)^m\,(b+2\,c\,x)$

$$\therefore\ u = \frac{(a+b\,x+c\,x^2)^{m+1}}{m+1}$$ (Hall, 223)

Fraccionarias.

5. $\int \frac{d\,x}{1+x} = \int \frac{d\,(1+x)}{1+x} = L\,(1+x)$. Peacock, 276)

6. $\int \frac{d\,x}{x \pm a} = \int \frac{d\,(x \pm a)}{x \pm a} = L\,(x \pm a)$

7. $\int \frac{d\,x}{(x \pm a)^n} = \int (x \pm a)^{-n}\,d\,(x \pm a) = \frac{(x \pm a)^{1-n}}{1-n}$.

8. $\int_x \frac{2x}{a+x^2} = \int \frac{d(a+x^2)}{a+x^2} = L(a+x^2)$

9. $\int_x \frac{2\,x-1}{x^2-x+1} = \int \frac{d\,u}{u} = L(x^2-x+1)$

10. $\int \frac{8\,x^3-3}{2\,x^4-3\,x-1}\,d\,x = \frac{d\,u}{u} = L\,(2\,x^4 - 3\,x - 1)$

11. $\int_x \frac{3\,(x-a)^2-2\,b}{(x-a)^3-2\,b\,x} = L\,[\,(x-a)^3 - 2\,b\,x\,]$

12. $$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \int \frac{d\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x}} =$$
$$= L\,\frac{x-1}{x}$$

Aquí se sacó factor comun a x^2 i en seguida se encontró que

$$\frac{dx}{x^2} = d\left(- \frac{1}{x}\right) = d\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Obsérvese, ademas, que esta operacion equivale a dividir por x^2 los dos términos de la fraccion:

$$\frac{dx}{x^2 - x} = \frac{\frac{dx}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{d\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x}}$$

13. $$\int \frac{n\,dx}{x^{1-n}(1 + x^{2n})} = \int \frac{n\,x^{n-1}dx}{1 + (x^n)^2} = \text{arc tg } x^n$$

(Tisserand, 150)

Irracionales.

14. $$\int \sqrt{a - b\,x^3}\,(-3\,b\,x^2)\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \sqrt{(a - b\,x^3)^3}$$

15. $$\int 2x\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \int (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2 + a^2)$$
$$= \frac{2}{3}\,(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, . \, dx$. Esta integral es mui importante.

Teniendo presente que

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{ab} = \frac{\frac{b}{a}}{b},$$

podemos hacer la trasformacion que se indica:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}};$$

pero, siendo

$$d(x+\sqrt{1+x^2}) = (1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\,dx,$$

encontramos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = L(x+\sqrt{1+x^2})$$

17. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\sqrt{ax^2+bx+c}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(a+x)^2}} = \int \frac{d(a+x)}{\sqrt{1-(a+x)^2}} = \text{arc sen}\,(a+x)$

Esponenciales.

19. $dy = e^x\,dx = d(e^x) \quad \therefore \quad y = e^x$

20. $\int e^x dx\,(3x^2+x^3-1) = \int e^x[(x^3-1)+3x^2]\,dx$

$$= \int [\,e^x (x^3-1)\,dx + e^x\,3x^2\,dx\,]$$

$$= \int [\,e^x (x^3-1)\,dx + e^x\,d\,(x^3-1)\,]$$

$$= \int [\,(x^3-1)\,de^x + e^x\,d\,(x^3-1)\,]$$

$$= \int (udv + vdu) = \int duv = uv$$

$$= \int (x^3-1)\,e^x$$ (Francoeur, 374).

21. $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \text{arc tg } e^x$$

(Briot, II, 195)

Logarítmicas.

22. $$\int \frac{Lx}{x}\,dx = \int Lx\,dLx = \frac{1}{2}\,L^2x.$$

(De Comberousse, IV, 684)

23. $$\int \frac{L^nx}{x}\,dx = \int L^nx\,dLx = \frac{L^{n+1}x}{n+1}.$$

(H. Cox, 39)

24. $$\int \frac{\sqrt{1+Lx}}{x}\,dx = \int (1+Lx)^{\frac{1}{2}}\,d\,(1+Lx) =$$

$$\frac{2}{3}\,L(1+Lx)^{\frac{3}{2}}$$ (J. Bertrand, II, 2)

$$25. \quad \int \frac{1}{x+L\,x}\,d\,x = \int \frac{\frac{1}{x}\,d\,x}{L\,x} = \int \frac{d\,L\,x}{L\,x} = L\,(L\,x).$$

$$26. \quad \int \frac{d\,x}{x\,(1+L^2 x)} = \int \frac{d\,L\,x}{1+L^2 x} = \text{arc. tg } L\,x$$

(J. Tannery, II, 519)

Trigonométricas:

$$27. \quad d\,y = \cos x\,d\,x = d \operatorname{sen} x \quad \therefore \quad \int \cos x\,d\,x = \operatorname{sen} x.$$

$$28. \quad \int_x \operatorname{sen} x \cos x = \int \operatorname{sen} x\,d \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$$

(Serret, II, 77)

$$29. \quad \int_x \operatorname{sen}^m x \cos x = \int u^m\,d\,u = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$$

(Sturm, I, 362)

$$30. \quad \int_x (\cos x + \operatorname{sen} x \cos x) = \int [\,(1+\operatorname{sen} x) \cos x\,]\,d\,x$$

$$= \int (1+\operatorname{sen} x)\,d\,(1+\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}\,(1+\operatorname{sen} x)^2$$

$$31. \quad d\,y = \sec^2 x\,d\,x = d \operatorname{tg} x \quad \therefore \quad \int \sec^2 x\,d\,x = \operatorname{tg} x.$$

$$32. \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,d\,x = \int \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\ L \operatorname{sen} x.$$ (Pauly, 193)

33. $$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\frac{d\,x}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \int \frac{d\,\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{L} \operatorname{tg} x.$$

34. $$\int \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\,\theta = \int \frac{d\,\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos\theta}{1} = \sec\theta$$

(Roberts, 8)

Circulares.

35. $$\int \frac{d\,x}{1+x^2} \operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \int \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\; d\,(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc}^2 \operatorname{tg} x.$$ (Peacock, 310)

36. $$\int (n+1) \frac{\operatorname{arc}^n \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \operatorname{arc}^{n+1} \operatorname{sen} x.$$

42. *Trasposicion del signo o coeficiente.*—Se hace esta operacion, tratada ya en los números 17 i 19, cuando el coeficiente de la derivada no forma parte de la diferencial.

1. $$\int -2\,(5+2\,x)^3\, d\,x = -\int (5+2\,x)^3\, d\,(5+2\,x) =$$

$$-\frac{1}{4}\,(5+2\,x)^4$$

2. $$\int A\,x^m\, d\,x = A \int x^m\, d\,x = \frac{A\,x^{m+1}}{m+1}.$$ (Sonnet, 204)

3. $$\int_x (a-b)\,(a+x) = (a-b) \int (a+x)\, d\,(a+x) =$$

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+x)^2$$

4. $\int_x 6\,x\,(1+x^2) = 3\int (1+x^2)\,2\,x\,d\,x = \frac{3}{2}(1+x^2)^2$

5. $\int -6\,x\,(1+x^2)^3\,d\,x = -3\int (1+x^2)^3\,d\,(1+x^2) =$

$$-\frac{3}{4}(1+x^2)^4$$

6. $\int -2\,0\,x\,(1-x^2)^9\,d\,x = 10\int (1-x)^9\,d\,(1-x^2) =$

$$(1-x^2)^{10}$$

7. $\frac{a}{b}\,f'(x) = (a+b\,x)^n$ o $d\,y = \frac{b}{a}(a+bx)^n\,d\,x$

$$\therefore\ y = \frac{1}{a}\int (a+b\,x)^n\,d\,(a+b\,x) = \frac{(a+b\,x)^{n+1}}{a\,(n+1}$$

8. $b\,x^2\,d\,y = a\,d\,x - b\,d\,y$ o $d\,y = \frac{a\,d\,x}{b+b\,x^2}$

$$\therefore\ y = \frac{a}{b}\int \frac{d\,x}{1+x^2} = \frac{a}{b}\,\text{arc. tg}\,x$$

9. $\frac{d\,v}{d\,u} + \frac{1}{a}\sqrt[100]{v^{137}} = o$ o $du = -a\,v^{-1{,}37}\,d\,v$

$$\therefore\ u = -a\int v^{-1{,}37}\,d\,v = -a\,v^{-0{,}37}$$

(Perry, 281)

10. $\operatorname{cosec} a \sec x\, dy + dx = 0$ o $dy = -\operatorname{sen} a \cos x\, dx$

$$\therefore\ y = -\operatorname{sen} a \int d \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} a \operatorname{sen} x.$$

11. $x dy - a dy = A dx$ o $dy = \dfrac{A dx}{x - a}$

$$\therefore\ y = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A L(x-a).$$

(Francoeur, 360)

12. $(x-a)^{n-1} dy + A(a-x) dx$ o $dy = \dfrac{A dx}{(x-a)^n}$

$$\therefore\ y = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

(Id., 361)

43. *Introduccion de un nuevo coeficiente.*—Empléase esta trasformacion cuando hai que *completar* la diferencial que se quiere integrar. (Núm. 20).

Funciones enteras.

1. Sea $dy = (1 + ax) dx \ \therefore\ y = \int (1 + ax)\, dx.$

Para completar la integral, es decir, para obtener $d(1 + ax)$, introducimos la unidad bajo la forma

$$\frac{a}{a} = \frac{1}{a} \cdot a:$$

$$y = \frac{1}{a} \int (1+ax)\, a\,dx = \frac{1}{a} \int (1+ax)\,d(1+ax) =$$

$$\frac{1}{2a}(1+ax)^2$$

2. $y = \int (a - bx)^2\,dx$. Introducimos $\dfrac{-b}{-b}$:

$$y = -\frac{1}{a} \int (a - bx)^2 (-b\,dx) =$$

$$-\frac{1}{b} \int (a - bx)\,d(a - bx) = -\frac{1}{2b}(a - bx)^2$$

3. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1} \int (m+1)x^m\,dx = \frac{1}{m+1} \int dx^{m+1}$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$ (De Comberousse, 1V, 682)

4. $\displaystyle\int_x 7\,x^2(2+x^3) = 7 \int (2+x^3)\,\frac{3}{3}\,x^2 dx$

$$= \frac{7}{3} \int (2+x^3)\,d(2+x^3) = \frac{7}{6}(2+x^3)^2$$

5. $\displaystyle\int_x 20\,x^4\,(1+x^5)^7 = \frac{20}{5} \int (1+x^5)^7 d\,(1+x^5) =$

$$\frac{1}{2}(1+x^5)^8$$

6. $\displaystyle\int_x (a+bx)^n = \frac{1}{b}(a+bx)^n\,d\,(a+bx) = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)}$

(Hall, 222)

(Continuará).