NUEVA SOLUCION

DE LA

ECUACION DEL 4.º CRADO

Por E. CRUCHAGA,
(Bachiller en Matemáticas)

NUEVA SOLUCION DE LA ECUACION DEL 4° GRADO

Por E. Cruchaga,
(Bachiller en Matemáticas)

Propongo al estudio de nuestros profesores una nueva solución de la ecuación jeneral del cuarto grado, que pudiera serles de alguna utilidad por su propiedad analítica.

Sea la ecuación

$$1)\quad x^4-ax^3+bx^2-cx+d=0$$

i sean sus raíces,

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

Hagamos

$$2)\quad \begin{cases} x_1+x_2=Z_1 \\ x_1+x_3=Z_2 \\ x_1+x_4=Z_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2+x_3=Z_4 \\ x_2+x_4=Z_5 \\ x_3+x_4=Z_6 \end{cases}$$

La resolvente será, llamando Z a la incógnita:

$$3)\quad Z^6-AZ^5+BZ^4-CZ^3+DZ^2-EZ+F=O$$

Determinando los coeficientes de 3) en función de los de 1), tendremos:

$$4)\begin{cases} A=3a \\ B=2b+3a^2 \\ C=4ab+a^3 \\ D=2a^2b+b^2+ac-4d \\ E=ab^2+a^2c-4ad \\ F=abc-c^2-a^2d \end{cases}$$

Por el método de Horner podemos obtener la ecuación transformada,

$$5)\quad U^6+2bU^4+(b^2+ac-4d)U^2+abc-c^2-a^2d=O,$$

en que

$$6)\quad U=Z-a$$

i haciendo

$$7)\quad U^2=V,$$

podemos escribir los valores de Z en función de las raíces de una ecuación del tercer grado en V.

Los valores de x se deducen del cuadro 2) por simple adición i sustracción; i por variación de un signo; a saber:

$$8)\begin{cases} Z_6+Z_2-Z_3 \\ Z_2-Z_6+Z_3 \\ Z_6-Z_2+Z_3 \end{cases}\begin{cases} Z_4+Z_5-Z_6 \\ Z_5-Z_4+Z_6 \\ Z_6-Z_5+Z_4 \end{cases}\begin{cases} Z_1+Z_2-Z_4 \\ Z_2-Z_1+Z_4 \\ Z_1-Z_2+Z_4 \end{cases}\begin{cases} Z_1+Z_3-Z_5 \\ Z_1-Z_3+Z_5 \\ Z_3-Z_1+Z_5 \end{cases}$$

Notemos que los índices se combinan en el orden siguiente:

$$\mathrm{I})\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

que son entre las combinaciones posibles de los seis índices, las que no contienen las agrupaciones siguientes de ellos:

$$\mathrm{II})\ \begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{array}$$

agrupaciones que figuran en las ecuaciones

$$9)\ \begin{cases} Z_1+Z_6=a \\ Z_2+Z_5=a \\ Z_3+Z_4=a \end{cases}$$

La adición de las otras cuatro combinaciones posibles, con las escepciones anotadas, a saber:

$$\mathrm{III})\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{array}$$

representan los valores que siguen:

$$10)\ \begin{cases} Z_1+Z_2+Z_3=a+2x_1 \\ Z_1+Z_4+Z_5=a+2x_2 \\ Z_2+Z_4+Z_6=a+2x_3 \\ Z_3+Z_5+Z_6=a+2x_4 \end{cases}$$

Las agrupaciones del cuadro I) se obtienen por permutación de uno cualquiera de los índices de las del cuadro III), evitando las agrupaciones II), o por permutación sucesiva de uno de los índices en una cualquiera de las cuatro agrupaciones del cuadro III), a saber:

$$1\ 2\ \boxed{3}\,,\quad 1\ \boxed{2}\ 3\,,\quad \boxed{1}\ 2\ 3\,,$$

$$1\ 4\ \boxed{5}\,,\quad 1\ \boxed{4}\ 5\,,\quad \boxed{1}\ 4\ 5\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

Así es que, según ensayemos en el sistema 8) los índices del cuadro III) o bien los del cuadro I), si en el primer ensayo no obtuviésemos uno de los valores de x que satisfaga la ecuación 1), en el segundo obtendremos simultáneamente los cuatro valores de x, sin tener que recurrir a nuevas permutaciones o ensayos.

ENRIQUE CRUCHAGA OSSA

N. B.—Para la documentación en la materia se puede consultar a Ludwig Mathiessen, «Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra».